**Министерство образования Российской Федерации**

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**им. Н.Э. БАУМАНА**

Факультет: Информатика и системы управления Кафедра: Информационная безопасность (ИУ8)

**Методы оптимизации Лабораторная работа №6 на тему:**

«Матричные игры с нулевой суммой.

Смешанные стратегии»

Вариант 18

**Преподаватель:**

Коннова Н.С.

**Студент**:  
Ожогин М.А.

**Группа:**

ИУ8-34

Москва 2024

# Цель работы

Изучить постановку антагонистической игры двух лиц в нормальной форме; получить навыки нахождения решения игры в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку) за обоих игроков.

# Постановка задачи

Формулировка матричной игры. В общем случае игра двух игроков А и В с нулевой суммой записывается в виде матрицы стратегий:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Стратегии | b1 | b2 | … | bn |
| a1 | c11 | c12 | … | c1n |
| a2 | c21 | c22 | … | c2n |
| … | … | … | … | … |
| am | cm1 | cm2 | … | cmn |

Здесь cij - выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока) при реализации ими своих стратегий ai (i = 1, ..., m), bj (j = 1, …, n) соответственно.

Минимальный гарантированный выигрыш игрока А называют нижней ценой игры. Он равен maxi minj cij. При плохой игре игрока В выигрыш может быть и большим. Минимально возможный проигрыш игрока В равен minj maxi cij, его называют верхней ценой игры.

Если нижняя и верхняя цены игры равны, их значение называют ценой игры.

Смешанные стратегии. Если игровая задача не имеет седловой точки, то на практике конкурирующие игроки применяют смешанные стратегии, т. е. попеременно используют две или более стратегий.

По определению,

x\* - оптимальная частота выбора стратегии для игрока А,

у\* - оптимальная частота выбора стратегии для игрока В,

если

где E – математическое ожидание выигрыша.

Рассмотрим произвольную игру с матрицей стратегий

Смешанная стратегия игрока А — это упорядоченная система m действительных неотрицательных чисел xi (i = 1, ..., m), такая, что

SА – множество всех смешанных стратегий игрока А.

Аналогично определяется смешанная стратегия игрока В – система чисел yj (j = 1, ..., n), такая, что

SB – множество всех смешанных стратегий игрока В.

Стратегию игрока А при условии, что

а

называют i-й чистой стратегией. Аналогично определяется j-я чистая стратегия игрока В.

Если смешанная стратегия игрока A

а смешанная стратегия игрока B

то математическое ожидание выигрыша игрока A

Если существуют стратегии

такие, что для любых выполняется условие

то х\*, у\* называют оптимальными смешанными стратегиями игроков А, В; Е(х\*, у\*) – цена игры для игрока А; х\* , у\* – решение игры или стратегическая седловая точка.

# Ход работы

Пусть матрица стратегий имеет вид

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Стратегии | b1 | b2 | b3 | b4 |
| a1 | 7 | 9 | 15 | 5 |
| a2 | 15 | 8 | 6 | 4 |
| a3 | 12 | 0 | 11 | 7 |
| a4 | 7 | 11 | 10 | 12 |
| a5 | 12 | 2 | 0 | 13 |

Найдем смешанные стратегии для игрока А. Для этого составим систему уравнений:

где g - минимальный выигрыш.

Разделим систему на функцию g:

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

Симплекс-таблица для игрока A:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -7.00 | -15.00 | -12.00 | -7.00 | -12.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 |
| -9.00 | -8.00 | 0.00 | -11.00 | -2.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -1.00 |
| -15.00 | -6.00 | -11.00 | -10.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -1.00 |
| -5.00 | -4.00 | -7.00 | -12.00 | -13.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -1.00 |
| -1.00 | -1.00 | -1.00 | -1.00 | -1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

Шаг №1. Нормированная матрица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.47 | 1.00 | 0.80 | 0.47 | 0.80 | -0.07 | -0.00 | -0.00 | -0.00 | 0.07 |
| -5.27 | 0.00 | 6.40 | -7.27 | 4.40 | -0.53 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | -0.47 |
| -12.20 | 0.00 | -6.20 | -7.20 | 4.80 | -0.40 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | -0.60 |
| -3.13 | 0.00 | -3.80 | -10.13 | -9.80 | -0.27 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | -0.73 |
| -0.53 | 0.00 | -0.20 | -0.53 | -0.20 | -0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.07 |

Шаг №2. Нормированная матрица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.32 | 1.00 | 0.62 | 0.00 | 0.35 | -0.08 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.03 |
| -3.02 | 0.00 | 9.12 | 0.00 | 11.43 | -0.34 | 1.00 | 0.00 | -0.72 | 0.06 |
| -9.97 | 0.00 | -3.50 | 0.00 | 11.76 | -0.21 | 0.00 | 1.00 | -0.71 | -0.08 |
| 0.31 | 0.00 | 0.38 | 1.00 | 0.97 | 0.03 | 0.00 | 0.00 | -0.10 | 0.07 |
| -0.37 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.32 | -0.05 | 0.00 | 0.00 | -0.05 | 0.11 |

Шаг №3. Нормированная матрица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.00 | 1.00 | 0.51 | 0.00 | 0.73 | -0.09 | 0.00 | 0.03 | 0.02 | 0.03 |
| 0.00 | 0.00 | 10.18 | 0.00 | 7.87 | -0.28 | 1.00 | -0.30 | -0.50 | 0.08 |
| 1.00 | 0.00 | 0.35 | 0.00 | -1.18 | 0.02 | 0.00 | -0.10 | 0.07 | 0.01 |
| 0.00 | 0.00 | 0.27 | 1.00 | 1.33 | 0.02 | 0.00 | 0.03 | -0.12 | 0.07 |
| 0.00 | 0.00 | 0.13 | 0.00 | -0.12 | -0.04 | 0.00 | -0.04 | -0.03 | 0.11 |

Оптимальное значение переменных:

Оптимальные стратегии:

Оптимальная смешанная стратегия игрока А - (0.0732, 0.2805, 0.0, 0.6463, 0.0)

Для нахождения смешанной стратегии игрока B составим систему.

где h - минимальный выигрыш.

Разделим систему на функцию h:

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

Симплекс-таблица для игрока B:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7.00 | 9.00 | 15.00 | 5.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| 15.00 | 8.00 | 6.00 | 4.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| 12.00 | 0.00 | 11.00 | 7.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 |
| 7.00 | 11.00 | 10.00 | 12.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 1.00 |
| 12.00 | 2.00 | 0.00 | 13.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

Шаг №1. Нормированная матрица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.00 | 5.27 | 12.20 | 3.13 | 1.00 | -0.47 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.53 |
| 1.00 | 0.53 | 0.40 | 0.27 | 0.00 | 0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.07 |
| 0.00 | -6.40 | 6.20 | 3.80 | 0.00 | -0.80 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.20 |
| 0.00 | 7.27 | 7.20 | 10.13 | 0.00 | -0.47 | 0.00 | 1.00 | 0.00 | 0.53 |
| 0.00 | -4.40 | -4.80 | 9.80 | 0.00 | -0.80 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 0.20 |
| 0.00 | 0.47 | 0.60 | 0.73 | 0.00 | -0.07 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.07 |

Шаг №2. Нормированная матрица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.00 | 3.02 | 9.97 | 0.00 | 1.00 | -0.32 | 0.00 | -0.31 | 0.00 | 0.37 |
| 1.00 | 0.34 | 0.21 | 0.00 | 0.00 | 0.08 | 0.00 | -0.03 | 0.00 | 0.05 |
| 0.00 | -9.12 | 3.50 | 0.00 | 0.00 | -0.62 | 1.00 | -0.38 | 0.00 | 0.00 |
| 0.00 | 0.72 | 0.71 | 1.00 | 0.00 | -0.05 | 0.00 | 0.10 | 0.00 | 0.05 |
| 0.00 | -11.43 | -11.76 | 0.00 | 0.00 | -0.35 | 0.00 | -0.97 | 1.00 | -0.32 |
| 0.00 | -0.06 | 0.08 | 0.00 | 0.00 | -0.03 | 0.00 | -0.07 | 0.00 | -0.11 |

Шаг №3. Нормированная матрица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.00 | 0.30 | 1.00 | 0.00 | 0.10 | -0.03 | 0.00 | -0.03 | 0.00 | 0.04 |
| 1.00 | 0.28 | 0.00 | 0.00 | -0.02 | 0.09 | 0.00 | -0.02 | 0.00 | 0.04 |
| 0.00 | -10.18 | 0.00 | 0.00 | -0.35 | -0.51 | 1.00 | -0.27 | 0.00 | -0.13 |
| 0.00 | 0.50 | 0.00 | 1.00 | -0.07 | -0.02 | 0.00 | 0.12 | 0.00 | 0.03 |
| 0.00 | -7.87 | 0.00 | 0.00 | 1.18 | -0.73 | 0.00 | -1.33 | 1.00 | 0.12 |
| 0.00 | -0.08 | 0.00 | 0.00 | -0.01 | -0.03 | 0.00 | -0.07 | 0.00 | -0.11 |

Оптимальное значение переменных:

Оптимальные стратегии:

Оптимальная смешанная стратегия игрока В - (0.4146, 0.0, 0.3415, 0.2439)

Цена игры будет равна:

Математическое ожидание:

Тогда ответ:

x = (0.0732, 0.2805, 0.0, 0.6463, 0.0)

y = (0.4146, 0.0, 0.3415, 0.2439)

E(x\*,y\*) = E(x, y) = 9.2439

# Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена потановка антагонистической игры двух лиц в нормальной форме, получены навыки нахождения решения игры за обоих игроков. Были получены оптимальные решения или же вероятности стратегий для каждого игрока.

Суммируя вероятности, мы получим единицу, что соответствует определению смешанной стратегии, значит вероятности мы нашли верно.

# Приложение.

Файл “main.py”:

import numpy as np  
  
def dummy\_variable(self, params, function):  
 A\_extended = np.hstack((self, np.eye(self.shape[0])))  
 c\_extended = np.concatenate((function, np.zeros(self.shape[0])))  
 A\_extended = np.vstack((A\_extended, c\_extended))  
 b\_extended = np.append(params, 0)  
 A\_extended = np.column\_stack((A\_extended, b\_extended))  
 return A\_extended  
  
  
def norm\_c(matrix):  
 max\_element\_row\_index = np.argmax(matrix[-1, :-1])  
 max\_element\_column = np.max(matrix[:, max\_element\_row\_index])  
 max\_element\_column\_index = np.argmax(matrix[:, max\_element\_row\_index])  
  
 matrix[max\_element\_column\_index, :] /= max\_element\_column  
 for i in range(matrix.shape[0]):  
 if i != max\_element\_column\_index:  
 ratio = matrix[i, max\_element\_row\_index] / matrix[max\_element\_column\_index, max\_element\_row\_index]  
 matrix[i, :] -= ratio \* matrix[max\_element\_column\_index, :]  
  
 return matrix  
  
  
def norm\_b(matrix):  
 max\_element\_column\_index = np.argmin(matrix[:-1, -1])  
 max\_element\_row\_index = np.argmin(matrix[max\_element\_column\_index, :-1])  
 max\_element\_row = matrix[max\_element\_column\_index, max\_element\_row\_index]  
  
 matrix[max\_element\_column\_index, :] /= max\_element\_row  
 for i in range(matrix.shape[0]):  
 if i != max\_element\_column\_index:  
 ratio = matrix[i, max\_element\_row\_index] / matrix[max\_element\_column\_index, max\_element\_row\_index]  
 matrix[i, :] -= ratio \* matrix[max\_element\_column\_index, :]  
  
 return matrix  
  
  
def simplex\_max(matrix):  
 i = 1  
 while np.any(matrix[-1, :-1] > 0):  
 norm\_c(matrix)  
  
 print(f"\nШаг №{i}. Нормированная матрица:")  
 print\_matrix(matrix)  
 i += 1  
  
 basic\_variables = []  
 for col in range(matrix.shape[1] - 1):  
 if abs(np.all(matrix[:, col] == 0)) or abs(np.count\_nonzero(matrix[:, col])) != 1:  
 basic\_variables.append(0)  
 else:  
 row\_index = np.argmax(np.abs(matrix[:, col]))  
 basic\_variables.append(matrix[row\_index, -1])  
  
 optimal\_value = matrix[-1, -1]  
 return basic\_variables, optimal\_value  
  
  
def simplex\_min(matrix):  
 i = 1  
 while np.any(matrix[:-1, -1] < 0):  
 norm\_b(matrix)  
  
 print(f"\nШаг №{i}. Нормированная матрица:")  
 print\_matrix(matrix)  
 i += 1  
  
 basic\_variables = []  
 for col in range(matrix.shape[1] - 1):  
 if abs(np.all(matrix[:, col] == 0)) or abs(np.count\_nonzero(matrix[:, col])) != 1:  
 basic\_variables.append(0)  
 else:  
 row\_index = np.argmax(np.abs(matrix[:, col]))  
 basic\_variables.append(matrix[row\_index, -1])  
  
 optimal\_value = matrix[-1, -1]  
 return basic\_variables, optimal\_value  
  
  
def print\_matrix(matrix):  
 width = max(len(f"{value:.2f}") for row in matrix for value in row)  
  
 for row in matrix:  
 for value in row:  
 print(f"{value:>{width}.2f}", end="\t")  
 print()  
  
  
A = np.array([  
 [7, 9, 15, 5],  
 [15, 8, 6, 4],  
 [12, 0, 11, 7],  
 [7, 11, 10, 12],  
 [12, 2, 0, 13]  
])  
print(A)  
c = np.array([1, 1, 1, 1])  
b = np.array([1, 1, 1, 1, 1])  
print("Симплекс-таблица для игрока A:")  
print\_matrix(dummy\_variable(-1 \* np.transpose(A), -1 \* c, -1 \* b))  
  
result\_variables\_A, result\_value\_A = simplex\_min(dummy\_variable(-1 \* np.transpose(A), -1 \* c, -1 \* b))  
  
print("\nОптимальное значение переменных:")  
print(f"u1 = {round(result\_variables\_A[0], 4)} \nu2 = {round(result\_variables\_A[1], 4)} \nu3 = {round(result\_variables\_A[2], 4)} \nu4 = {round(result\_variables\_A[3], 4)} \nu5 = {round(result\_variables\_A[4], 4)}")  
  
print("W =", round(result\_value\_A, 4))  
  
  
print("\nСимплекс-таблица для игрока В:")  
print\_matrix(dummy\_variable(A, b, c))  
  
result\_variables\_B, result\_value\_B = simplex\_max(dummy\_variable(A, b, c))  
  
print("\nОптимальное значение переменных:")  
print(f"v1 = {round(result\_variables\_B[0], 4)} \nv2 = {round(result\_variables\_B[1], 4)} \nv3 = {round(result\_variables\_B[2], 4)} \nv4 = {round(result\_variables\_B[3], 4)}")  
  
print("Z =", round(-result\_value\_B, 4))  
  
  
g = 1 / result\_value\_A  
print("-----------------------\ng = ", round(g, 4))  
print(f"x1 = {round(g \* result\_variables\_A[0], 4)} \nx2 = {round(g \* result\_variables\_A[1], 4)} \nx3 = {round(g \* result\_variables\_A[2], 4)} \nx4 = {round(g \* result\_variables\_A[3], 4)} \nx5 = {round(g \* result\_variables\_A[4], 4)}")  
print(f"Оптимальная смешанная стратегия игрока А - ({round(g \* result\_variables\_A[0], 4)}, {round(g \* result\_variables\_A[1], 4)}, {round(g \* result\_variables\_A[2], 4)}, {round(g \* result\_variables\_A[3], 4)}, {round(g \* result\_variables\_A[4], 4)})")  
  
h = -1 / result\_value\_B  
print("-----------------------\nh = ", round(h, 4))  
print(f"y1 = {round(h \* result\_variables\_B[0], 4)} \ny2 = {round(h \* result\_variables\_B[1], 4)} \ny3 = {round(h \* result\_variables\_B[2], 4)} \ny4 = {round(h \* result\_variables\_B[3], 4)}")  
print(f"Оптимальная смешанная стратегия игрока В - ({round(h \* result\_variables\_B[0], 4)}, {round(h \* result\_variables\_B[1], 4)}, {round(h \* result\_variables\_B[2], 4)}, {round(h \* result\_variables\_B[3], 4)})")  
  
print("\nЦена игры будет равна:\n1/W = 1/Z =", round(g, 4))